

# ДИФУЗИЈА РАДОНА И ТОРОНА У ДИФУЗИОНИМ КОМОРАМА

Владимир М. МАРКОВИЋ,

Ненад СТЕВАНОВИЋ и

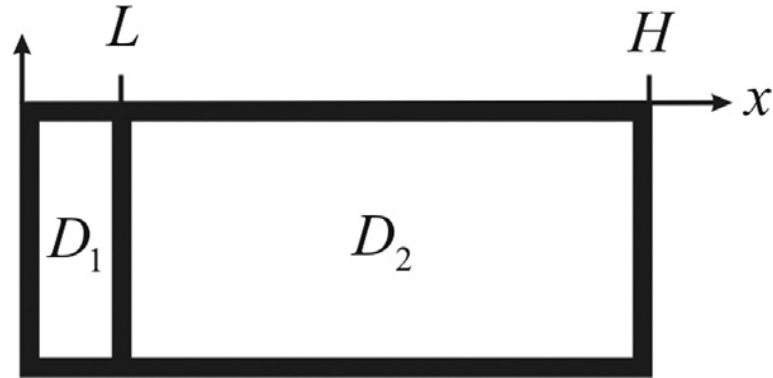
Драгослав НИКЕЗИЋ

*Универзитет у Крагујевцу*

*Природно-математички факултет*

*Институт за физику*

# Једно димензионални проблем – аксијална дифузија



$$\frac{\partial C_1(x,t)}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 C_1(x,t)}{\partial x^2} - \lambda C_1(x,t)$$

$$\frac{\partial C_2(x,t)}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 C_2(x,t)}{\partial x^2} - \lambda C_2(x,t)$$

Гранични услови:  $C_1(0,t) = C_0$        $C_1(L,t) = C_2(L,t)$        $\frac{\partial C_2(H,t)}{\partial x} = 0$

$$D_1 \frac{\partial C_1(L,t)}{\partial x} = D_2 \frac{\partial C_2(L,t)}{\partial x}$$

Почетни услови:  $C_1(x,0) = 0$        $C_2(x,0) = 0$

Опште решење:

$$C_1(x,t) = C'_A e^{-(m_1^2 D_1 + \lambda)t} [A_1 \sin(m_1 x) + B_1 \cos(m_1 x)] + C_1 x e^{-\lambda t} + C_2 e^{-\lambda t} + C_3 e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{D_1}} x} + C_4 e^{\sqrt{\frac{\lambda}{D_1}} x}$$

$$C_2(x,t) = C'_B e^{-(m_2^2 D_2 + \lambda)t} [A_2 \sin(m_2 x) + B_2 \cos(m_2 x)] + C'_1 x e^{-\lambda t} + C'_2 e^{-\lambda t} + C'_3 e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}} x} + C'_4 e^{\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}} x}$$

Гранични услови намећу критеријум за који није могуће наћи константе неодређености:

$$\tan\left((2n+1)\frac{\pi}{2H}\sqrt{\frac{D_2}{D_1}}L\right) = \sqrt{\frac{D_1}{D_2}} \tan\left((2n+1)\frac{\pi}{2H}L\right)$$

Равнотежни гранични услови:

$$C_1(L, \infty) = C_2(L, \infty)$$

$$C_1(x,t) = C_3 e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{D_1}} x} + C_4 e^{\sqrt{\frac{\lambda}{D_1}} x} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n C_A e^{-\left[\left((2n+1)\frac{\pi}{2H}\sqrt{\frac{D_2}{D_1}}\right)^2 D_1 + \lambda\right]t} \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2H}\sqrt{\frac{D_2}{D_1}}x\right)$$

$$C_2(x,t) = C'_3 e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}} x} + C'_4 e^{\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}} x} + \sum_{n=0}^{\infty} C'_n C_A \sqrt{\frac{D_1}{D_2}} \frac{\cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2H}\sqrt{\frac{D_2}{D_1}}L\right)}{\cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2H}L\right)} e^{-\left[\left((2n+1)\frac{\pi}{2H}\right)^2 D_2 + \lambda\right]t} \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2H}x\right)$$

Гранични услови омогућавају одређивање константи:

$$C_3 = \frac{C_0 e^{2L\sqrt{\frac{\lambda}{D_1}}} \left[ D_1 \left( e^{2H\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} + e^{2L\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} \right) \sqrt{\frac{\lambda}{D_1}} + D_2 \left( e^{2H\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} - e^{2L\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} \right) \sqrt{\frac{\lambda}{D_2}} \right]}{D_1 \left( 1 + e^{2L\sqrt{\frac{\lambda}{D_1}}} \right) \left( e^{2H\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} + e^{2L\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} \right) \sqrt{\frac{\lambda}{D_1}} + D_2 \left( -1 + e^{2L\sqrt{\frac{\lambda}{D_1}}} \right) \left( e^{2H\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} - e^{2L\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} \right) \sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}}$$

$$C_4 = \frac{C_0 \left( D_1 \left( e^{2H\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} + e^{2L\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} \right) \sqrt{\frac{\lambda}{D_1}} - D_2 \left( e^{2H\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} - e^{2L\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} \right) \sqrt{\frac{\lambda}{D_2}} \right)}{D_1 \left( 1 + e^{2L\sqrt{\frac{\lambda}{D_1}}} \right) \left( e^{2H\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} + e^{2L\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} \right) \sqrt{\frac{\lambda}{D_1}} + D_2 \left( -1 + e^{2L\sqrt{\frac{\lambda}{D_1}}} \right) \left( e^{2H\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} - e^{2L\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} \right) \sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}}$$

$$C_3' = \frac{2C_0 D_1 e^{2H\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}} + L \left( \sqrt{\frac{\lambda}{D_1}} + \sqrt{\frac{\lambda}{D_2}} \right)} \sqrt{\frac{\lambda}{D_1}}}{D_1 \left( 1 + e^{2L\sqrt{\frac{\lambda}{D_1}}} \right) \left( e^{2H\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} + e^{2L\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} \right) \sqrt{\frac{\lambda}{D_1}} + D_2 \left( -1 + e^{2L\sqrt{\frac{\lambda}{D_1}}} \right) \left( e^{2H\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} - e^{2L\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} \right) \sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}}$$

$$C_4' = \frac{2C_0 D_1 e^{L \left( \sqrt{\frac{\lambda}{D_1}} + \sqrt{\frac{\lambda}{D_2}} \right)} \sqrt{\frac{\lambda}{D_1}}}{D_1 \left( 1 + e^{2L\sqrt{\frac{\lambda}{D_1}}} \right) \left( e^{2H\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} + e^{2L\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} \right) \sqrt{\frac{\lambda}{D_1}} + D_2 \left( -1 + e^{2L\sqrt{\frac{\lambda}{D_1}}} \right) \left( e^{2H\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} - e^{2L\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} \right) \sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}}$$

Почетни услови омогућавају одређивање остале две константе развојем у Фуријеов ред

$$C_n C_A = \frac{2}{H \sqrt{\frac{D_1}{D_2}}} \int_0^{H \sqrt{\frac{D_1}{D_2}}} (-C_3 e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{D_1}} x} - C_4 e^{\sqrt{\frac{\lambda}{D_1}} x}) \cdot \sin\left((2n+1) \frac{\pi x}{2H} \sqrt{\frac{D_2}{D_1}}\right) dx$$

$$C_n C_A = -4C_0 \left[ \frac{\frac{D_2(1+2n)\pi}{(4H^2\pi + D_2\pi^2(1+2n)^2)} + (-1)^{n+1}(1+2n)2\pi\lambda H \left( \sqrt{\frac{D_1}{D_2}} - 1 \right) e^{-H\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} \left( e^{4H\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} - e^{4L\sqrt{\frac{\lambda}{D_1}}} \right)}{D_1^2(4H^2\lambda + D_2\pi^2(1+2n)^2) \left( \frac{D_1}{D_2} \sqrt{\frac{\lambda}{D_2}} \left( 1 + e^{2L\sqrt{\frac{\lambda}{D_1}}} \right) \left( e^{2H\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} + e^{2L\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} \right) + \sqrt{D_1\lambda} \left( -1 + e^{2L\sqrt{\frac{\lambda}{D_1}}} \right) \left( e^{2H\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} - e^{2L\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} \right) \right)} \right]$$

$$C_n'' = \frac{C_n'}{C_n} C_n C_A \sqrt{\frac{D_1}{D_2}} \frac{\cos\left((2n+1) \frac{\pi}{2H} \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} L\right)}{\cos\left((2n+1) \frac{\pi}{2H} L\right)} = \frac{2}{H} \int_0^H \left( -C_3' e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}} x} - C_4' e^{\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}} x} \right) \cdot \sin\left((2n+1) \frac{\pi x}{2H}\right) dx$$

$$C_n'' = \frac{8C_0 D_1 D_2 e^{L\left(\sqrt{\frac{\lambda}{D_1}} + \sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}\right)} \sqrt{\frac{\lambda}{D_1}} (1+2n)\pi \left( 1 + e^{2H\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} + 2e^{2H\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} \sin(n\pi) \right)}{\left( \sqrt{\lambda D_1} \left( 1 + e^{2L\sqrt{\frac{\lambda}{D_1}}} \right) \left( e^{2H\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} + 2e^{2H\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} \right) + \sqrt{\lambda D_2} \left( -1 + e^{2L\sqrt{\frac{\lambda}{D_1}}} \right) \left( e^{2H\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} - 2e^{2L\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}} \right) \right) (4H^2\lambda + D_2\pi^2(1+2n)^2)}$$

Решење је одређено и важи за велико t. Алтернатива – нумеричко решавање

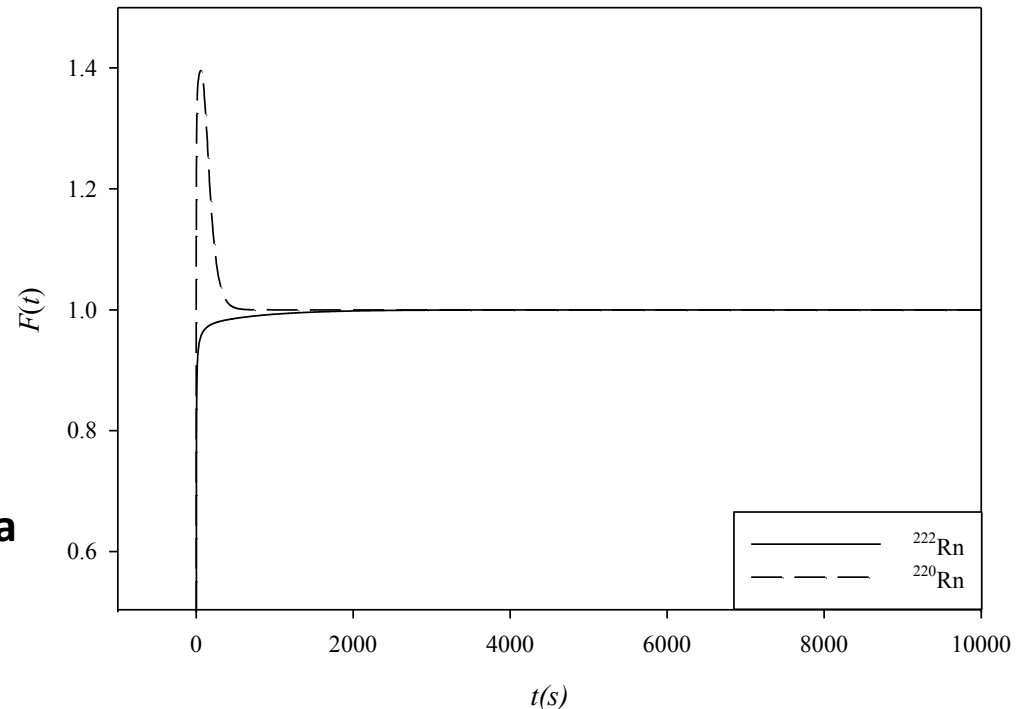
# Нумерички метод – решење партикуларног случаја

- Метод коначних разлика

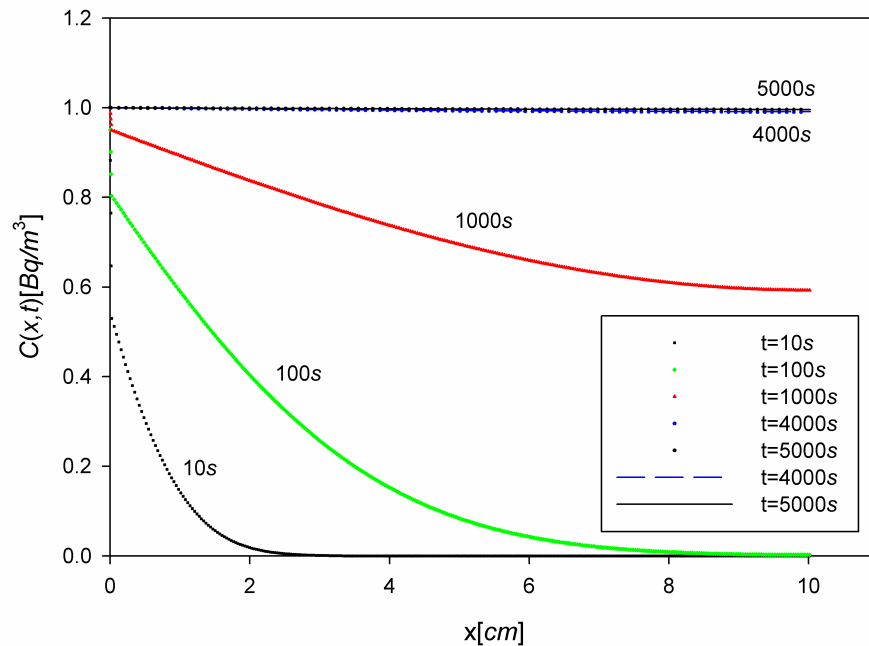
$$\frac{C_{ij+1}^1 - C_{ij}^1}{\Delta t} = D_1 \cdot \frac{C_{i+1j}^1 - 2C_{ij}^1 + C_{i-1j}^1}{\Delta x^2} - \lambda \cdot C_{ij}^1$$

$$\frac{C_{ij+1}^2 - C_{ij}^2}{\Delta t} = D_2 \cdot \frac{C_{i+1j}^2 - 2C_{ij}^2 + C_{i-1j}^2}{\Delta x^2} - \lambda \cdot C_{ij}^2$$

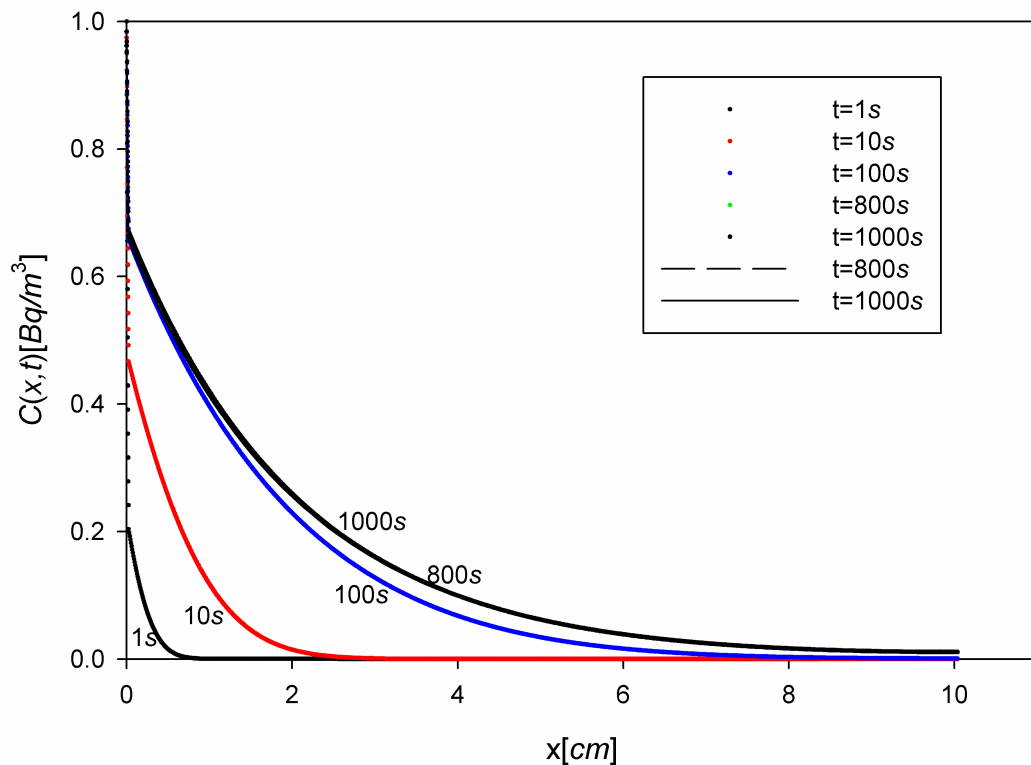
Однос концентрација леве и десне стране граничне површи која раздваја две средине

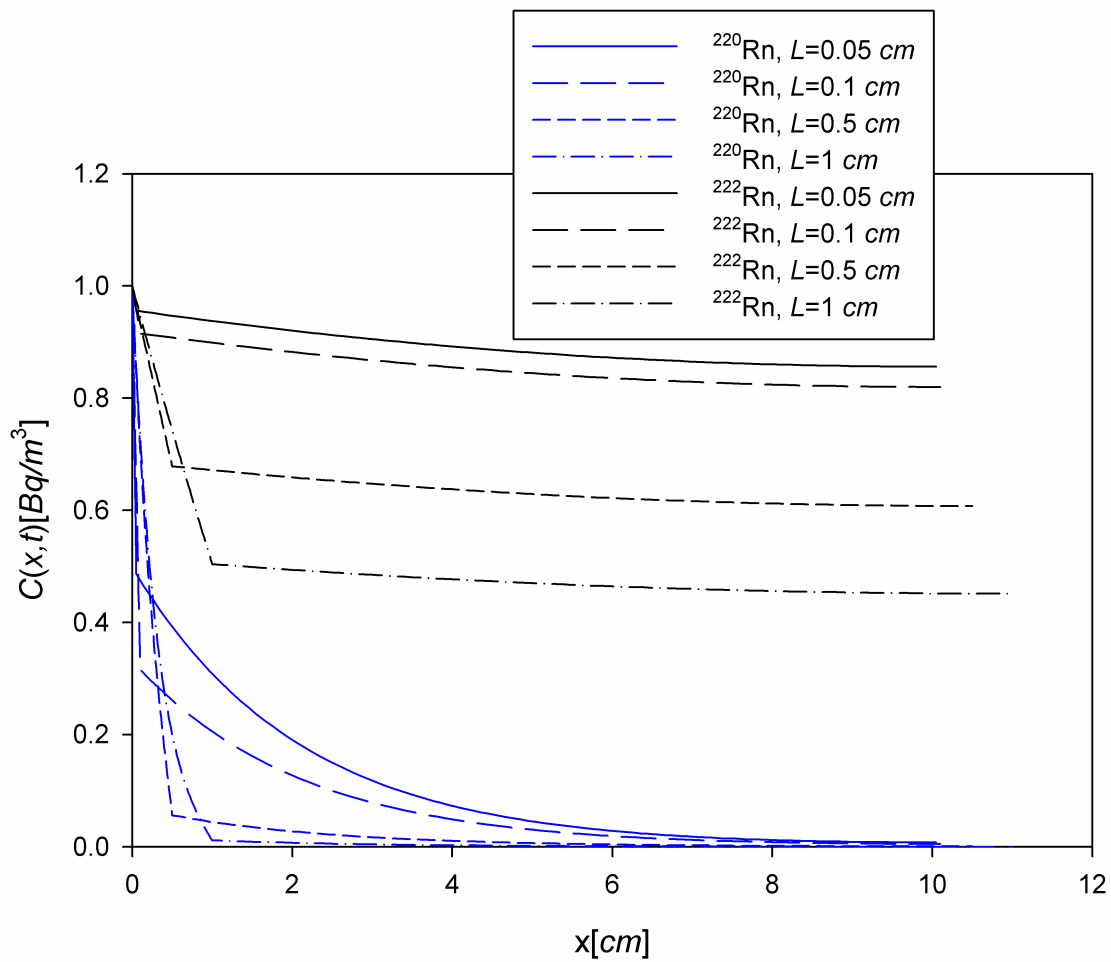


**Концентрације радона (горе) и торона (доле) унутар коморе (тачке представљају нумеричка решења а линије аналитичка)**



Урачунавајући филтер папир у процес дифузије може се уочити да филтер драстично редукује концентрацију торона (за трећину спољне вредности). Концентрација торона на дну коморе износи свега 1% од концентрације ван коморе.



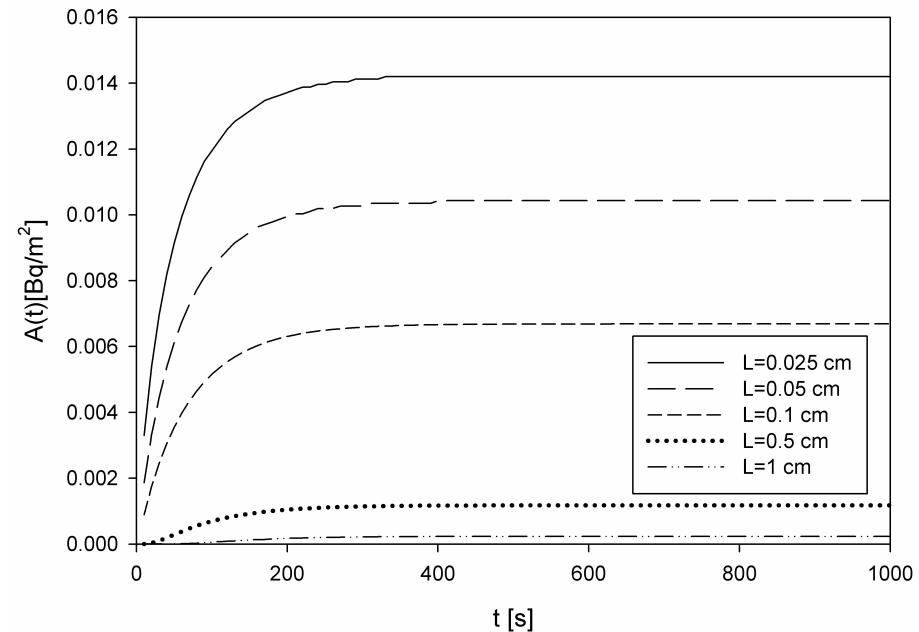
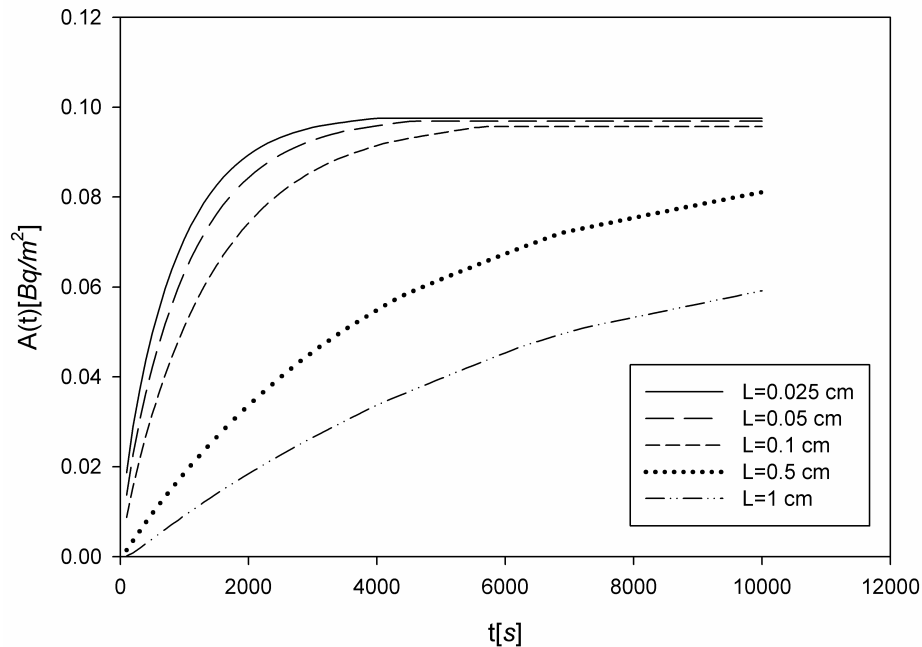


**Утицај дебљине филтер папира на концентарију радона и торона у комори**



Укупна активност унутар коморе у неком временском тренутку  $t$  се може одредити интеграцијом активносне концентрације дуж  $x$  осе и множењем са површином основе цилиндра  $S$ :

$$A(t) = S \int_L^H C_2(x,t) dx$$



**Зависност укупне активности радона (лево) и торона (десно) у комори од времена**

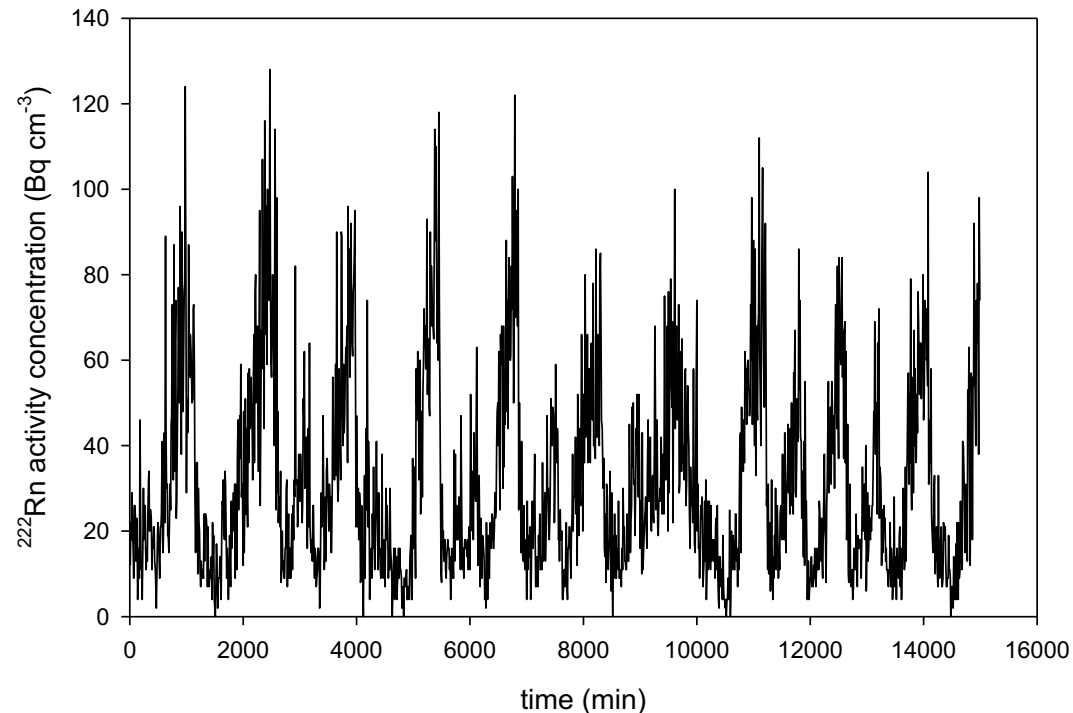
# Временски зависна концентрација изван коморе

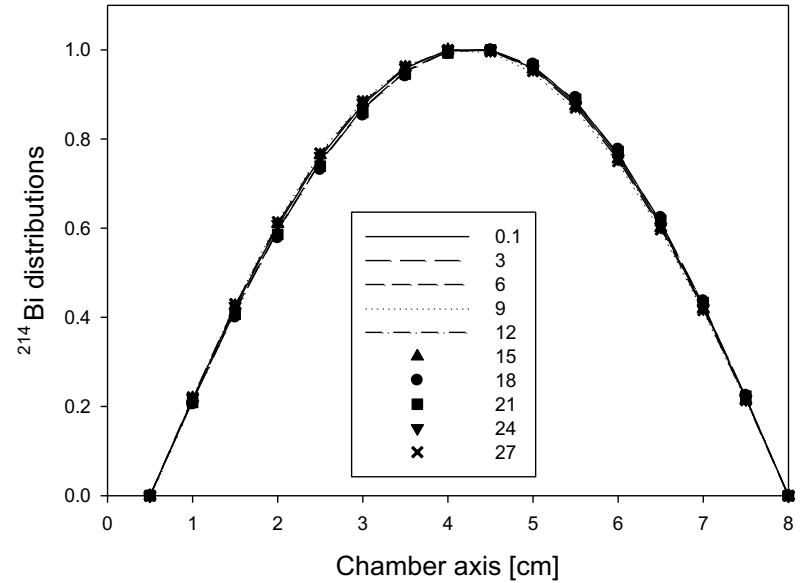
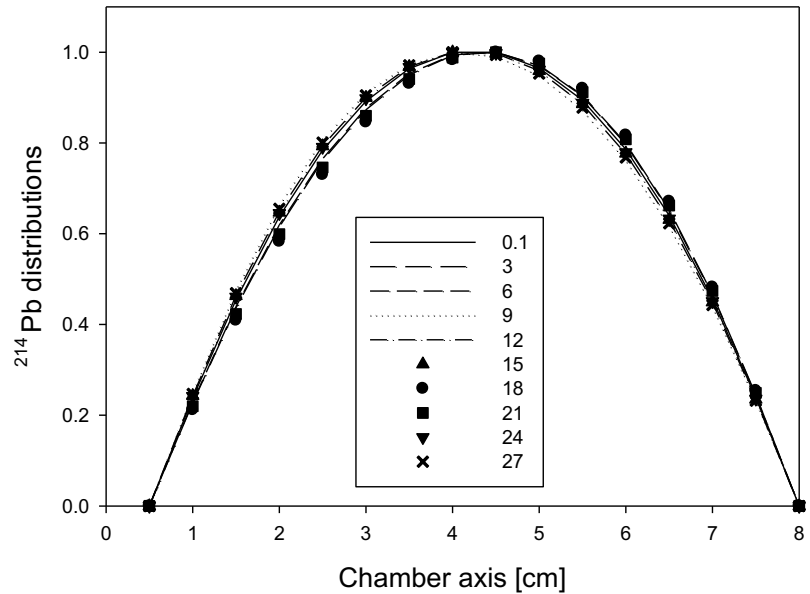
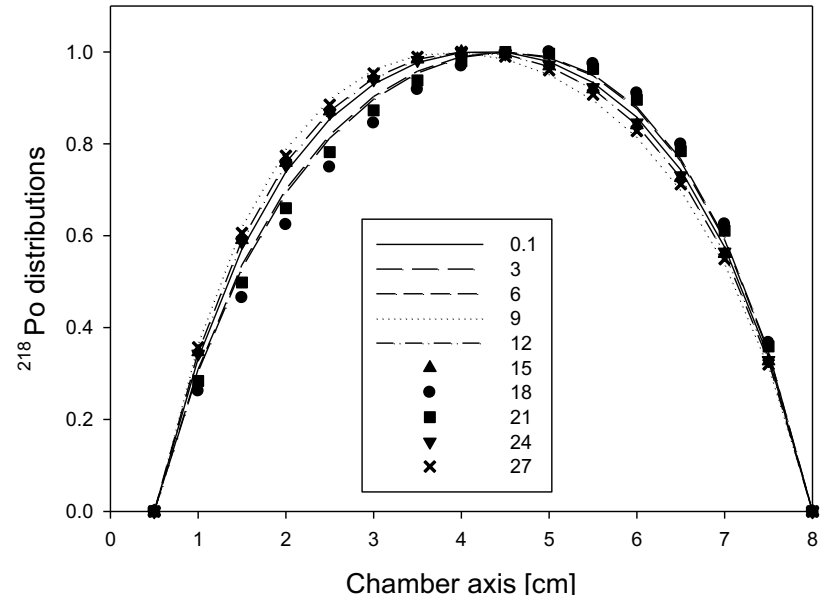
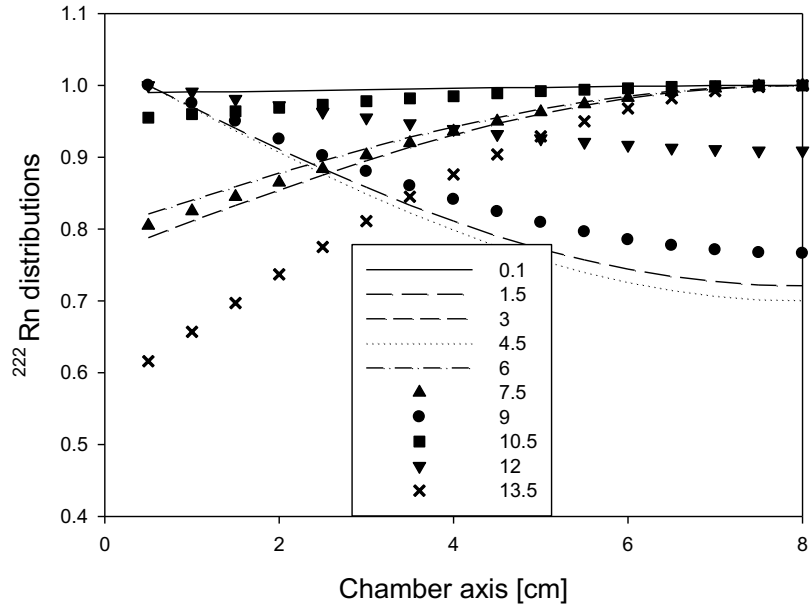
$$\frac{\partial C_n(t, r, z)}{\partial t} = D \cdot \left( \frac{\partial^2 C_n(t, r, z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C_n(t, r, z)}{\partial r} + \frac{\partial^2 C_n(t, r, z)}{\partial z^2} \right) - \lambda_n \cdot C_n(t, r, z) + \lambda_{n-1} \cdot C_{n-1}(t, r, z)$$

$$\frac{C_{k+1ij}^n - C_{kij}^n}{\Delta t} = D \cdot \left( \frac{C_{ki+1j}^n - 2C_{kij}^n + C_{ki-1j}^n}{\Delta r^2} + \frac{C_{ki+1j}^n - C_{ki-1j}^n}{i \cdot 2\Delta r^2} + \frac{C_{kij+1}^n - 2C_{kij}^n + C_{kij-1}^n}{\Delta z^2} \right) - \lambda_n \cdot C_{kij}^n + \lambda_{n-1} \cdot C_{kij}^{n-1}$$

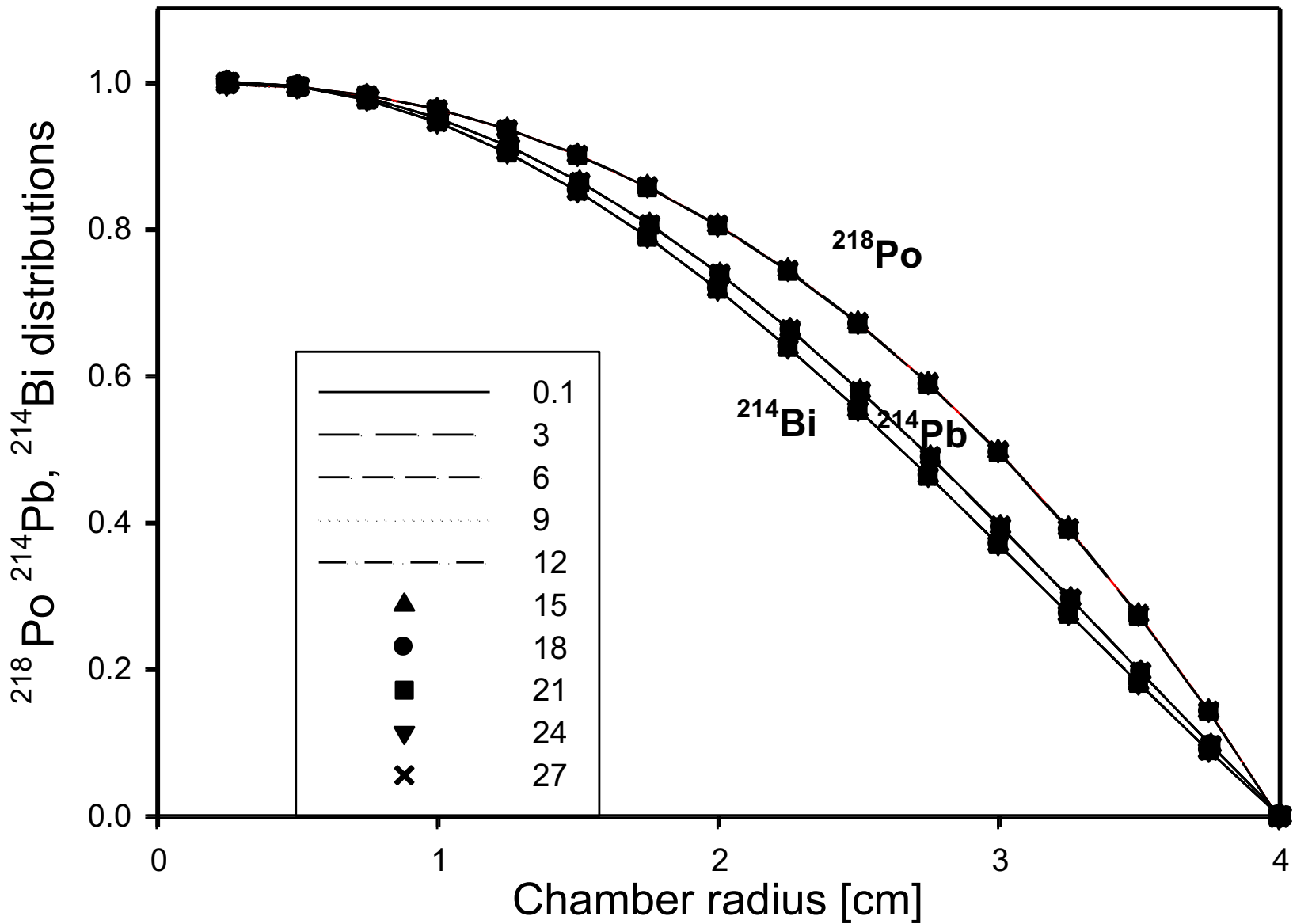
Моделована концентрација  $^{222}\text{Rn}$  у просторији према

$$A_0 = 5 + (10 + a \cdot u_1) \left( \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \right)^2$$

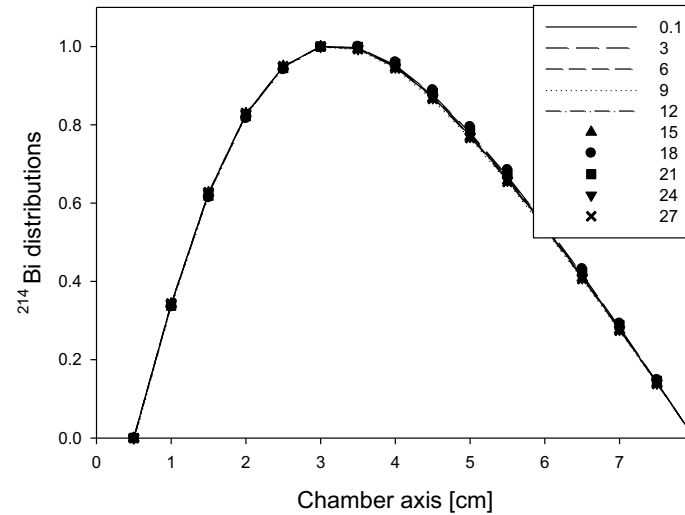
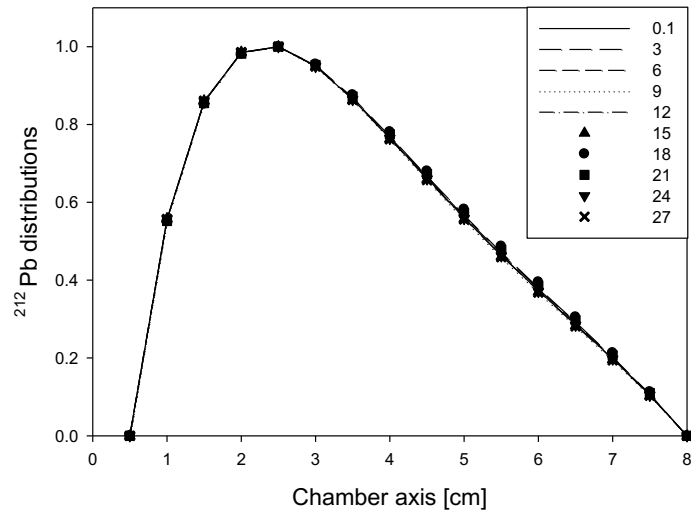
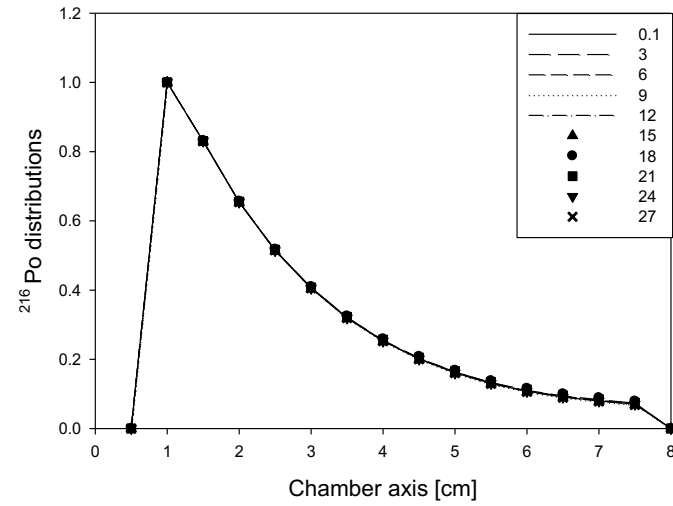
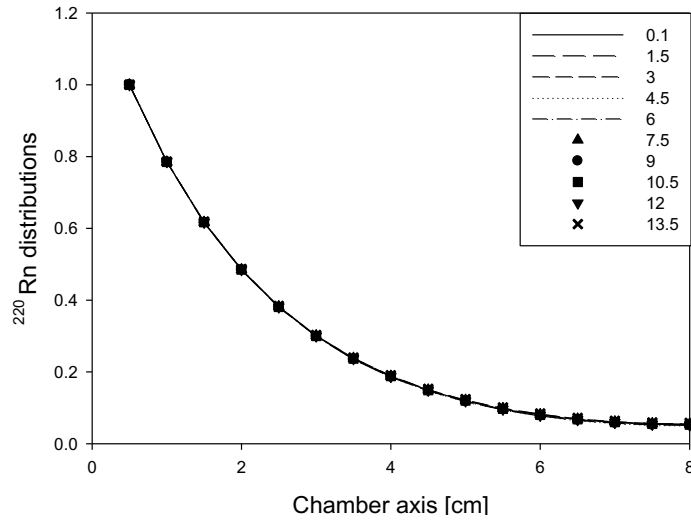




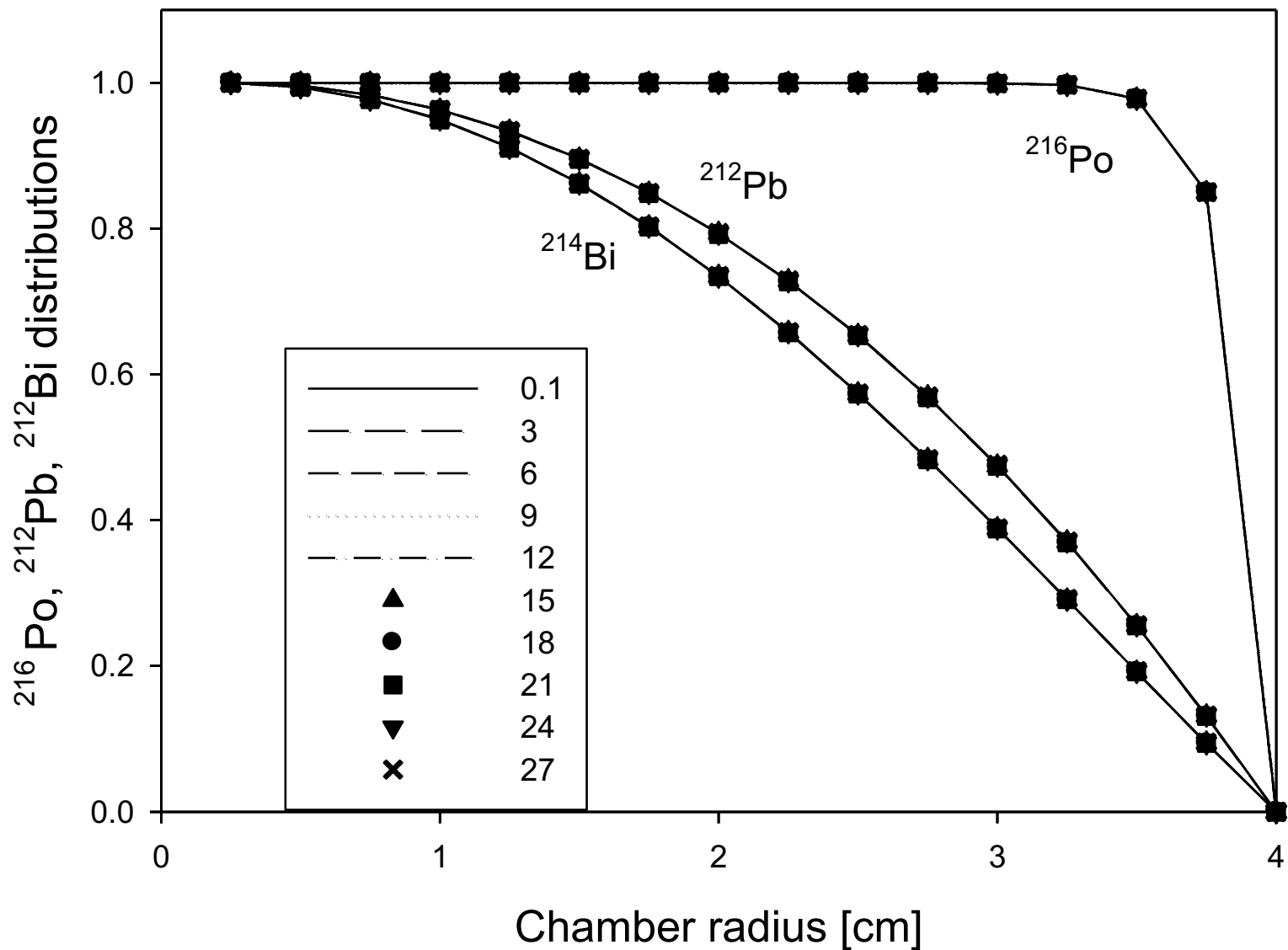
Дистрибуција  $^{222}\text{Rn}$  и његових потомака дуж осе коморе



Дистрибуција радонових и торонових потомака дуж радијуса на половини осе цилиндра



Дистрибуција  $^{220}\text{Rn}$  и његових потомака дуж осе коморе



Дистрибуција  $^{216}\text{Po}$ ,  $^{212}\text{Pb}$  и  $^{212}\text{Bi}$  дуж радијуса

# Слободне и депоноване фракције $^{222}\text{Rn} / ^{220}\text{Rn}$ потомака

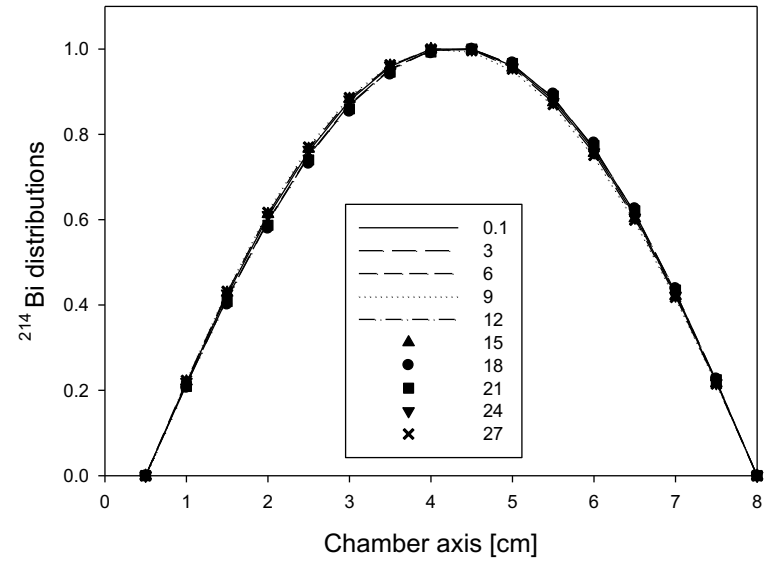
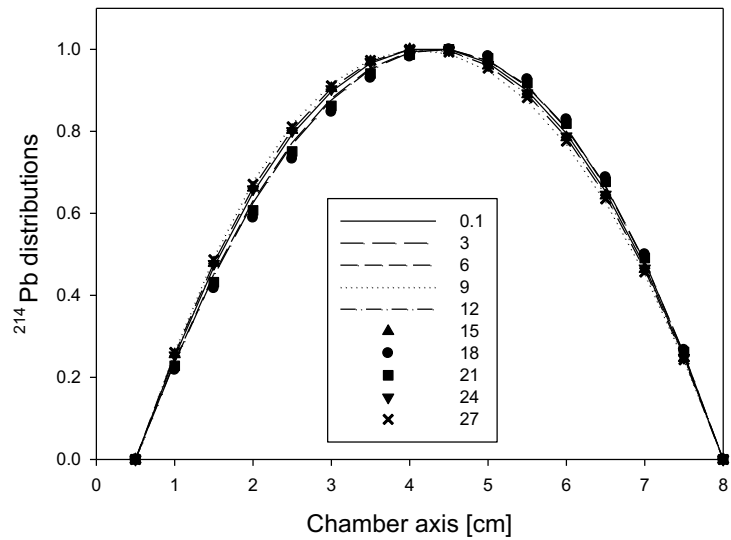
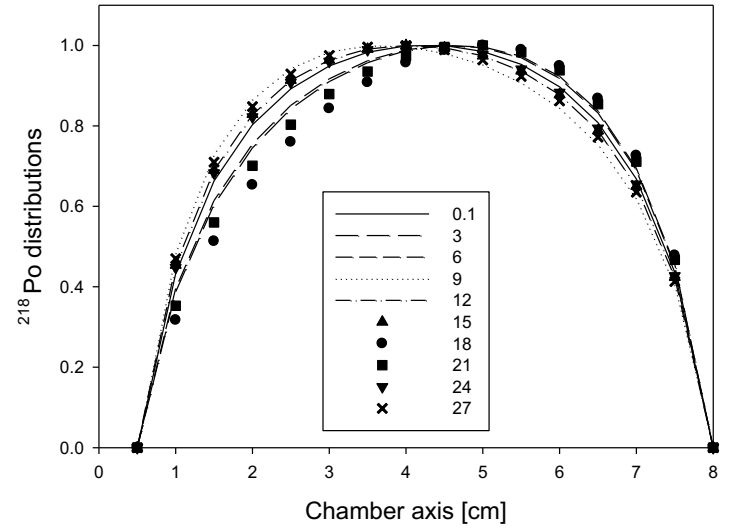
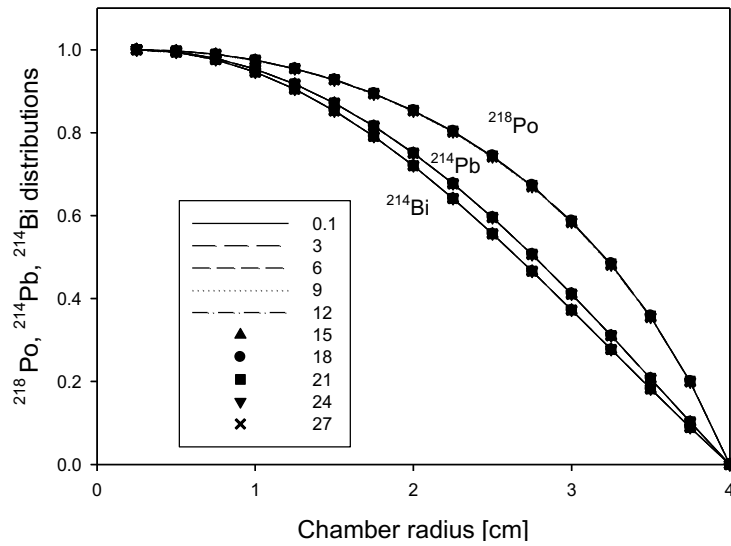
$$N_T^n = 2\pi\lambda_n \sum_{i=1}^{i_{\max}} \sum_{j=1}^{j_{\max}} C_{k,i,j}^n (i\Delta r) \Delta r \Delta z$$

$$N_{dT}^n = 2\pi D \left( \sum_{i=1}^{i_{\max}} \frac{\partial C}{\partial z} \Big|_{z=0} (i\Delta r) \Delta z + \sum_{i=1}^{i_{\max}} \frac{\partial C}{\partial z} \Big|_{z=H} (i\Delta r) \Delta r \Delta z + \sum_{z=2}^{z_{\max}-1} \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r=R} (i_{\max} \Delta r) \Delta z \right)$$

$$N_n = N_{T\lambda}^n + N_{dT}^n \quad f_{nd} = \frac{N_{T\lambda}^n}{N_{T\lambda}^n + N_{dT}^n} \quad f_n = \frac{2\pi\lambda_n \sum_{i=1}^{i_{\max}} \sum_{j=1}^{j_{\max}} C_{k,i,j}^n (i\Delta r) \Delta r \Delta z}{2\pi\lambda_0 \sum_{i=1}^{i_{\max}} \sum_{j=1}^{j_{\max}} C_{k,i,j}^0 (i\Delta r) \Delta r \Delta z}$$

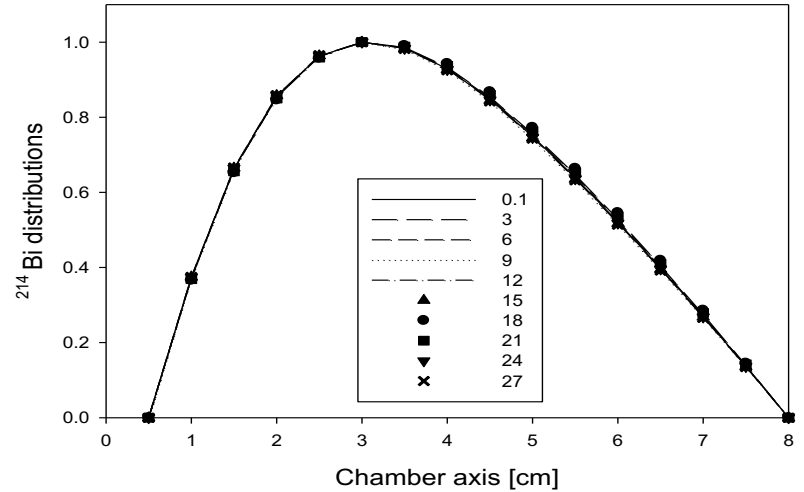
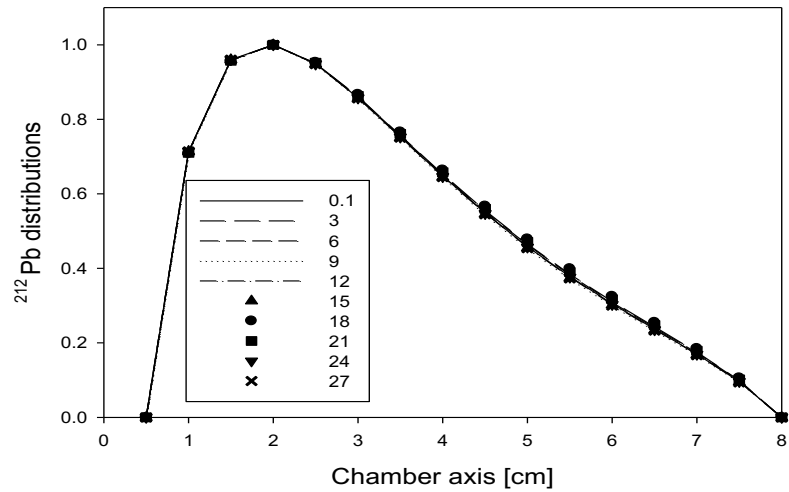
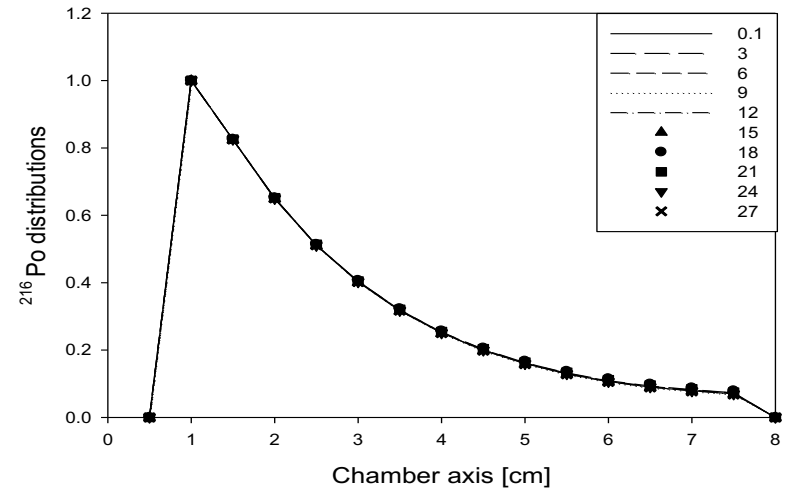
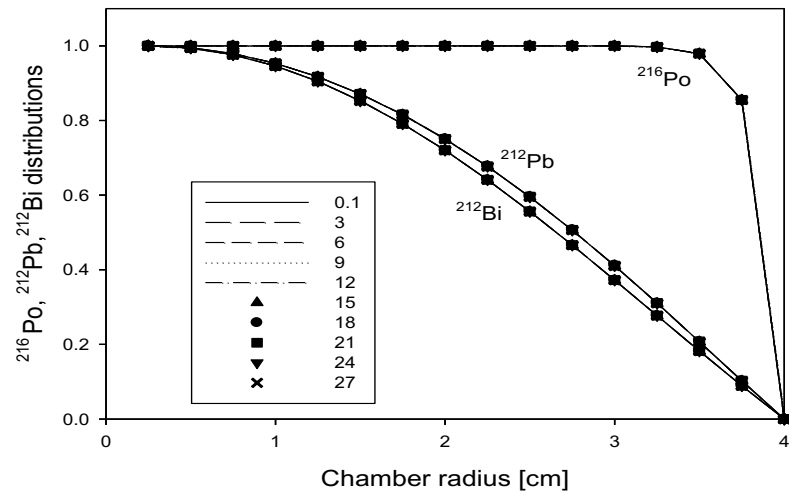
Progeny	Po	Pb	Bi
	$f_n$	$f_n$	$f_n$
$^{222}\text{Rn}$	6.18	0.079	0.0014
$^{220}\text{Rn}$	66.1	0.025	0.0001

Слободне фракције  $^{222}\text{Rn}/^{220}\text{Rn}$  потомака изражене у процентима



Дистрибуција депонованих  $^{218}\text{Po}$ ,  $^{214}\text{Pb}$  и  $^{214}\text{Bi}$  на дну коморе и дуж зида

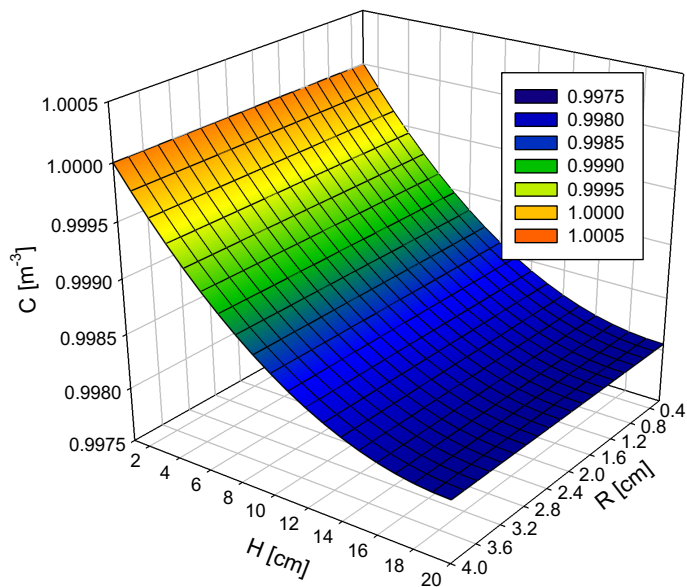




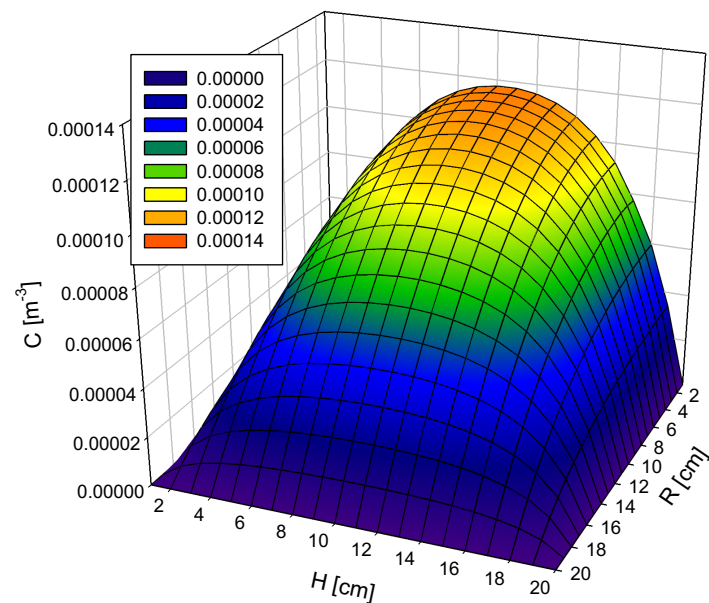
Дистрибуција депонованих  $^{218}\text{Po}$ ,  $^{214}\text{Pb}$  и  $^{214}\text{Bi}$  на дну коморе и зиду коморе

# Просторна дистрибуција радона и његових потомака у случају јединичне спољашње концентрације

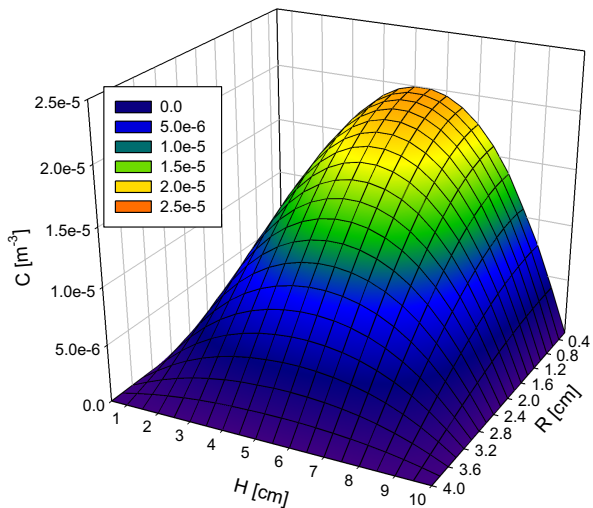
$^{222}\text{Rn}$



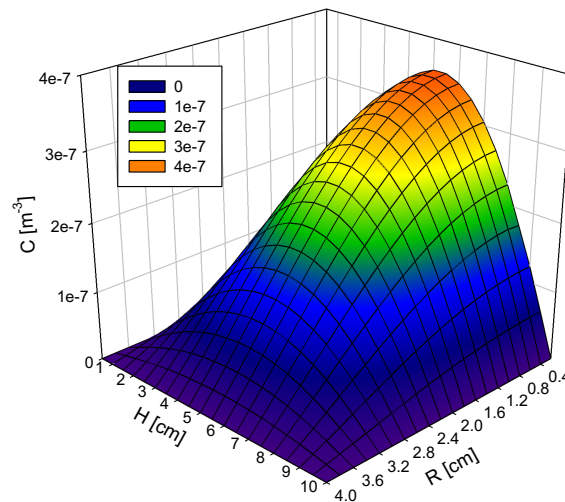
$^{218}\text{Po}$



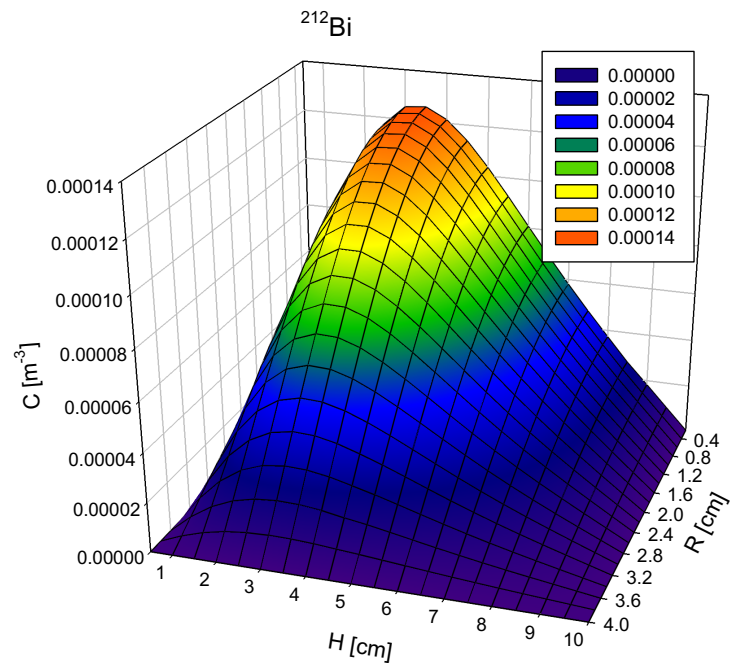
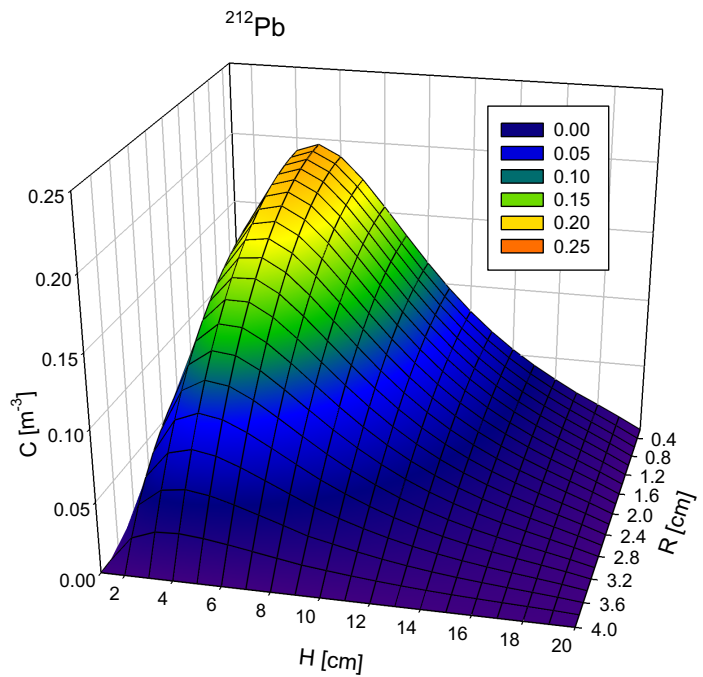
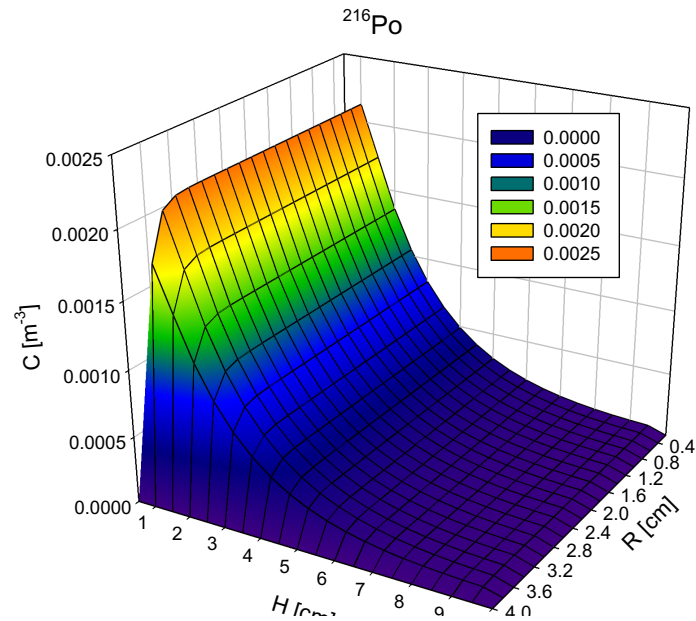
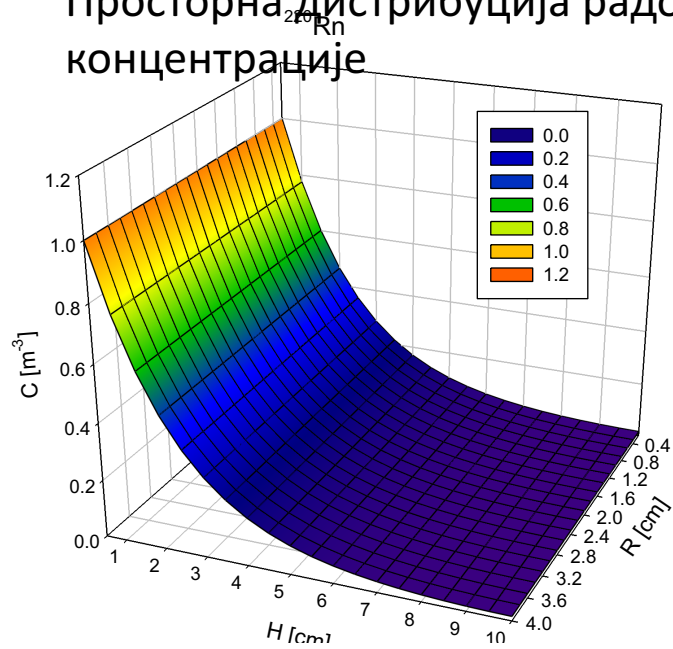
$^{214}\text{Pb}$



$^{214}\text{Bi}$



# Просторна дистрибуција радона и његових потомака у случају јединичне спољашње концентрације



# Закључак

- филтер папир, иако веома мале дебљине знатно утиче на концентрацију радона и поготово торона унутар коморе. Могуће је реализовати ситуацију, у којој једноставним повећањем дебљине филтер папира, у комори не постоји торон и његови потомци, док се концентрација радона која прође кроз филтер смањи на половину концентрације ван коморе.
- У зависности од дебљине филтер папира време достизања равнотежне концентрације може бити доста продужено, што се мора узети у обзир, јер у том случају се не може занемарити време достизања равнотежне концентрације.
- Варијација концентрације изван коморе показује да расподеле потомака у комори, као и расподеле потомака депонованих на зидове се мењају у случају радона. Торон је мање подложен променама расподеле концентрације у току времена, услед спољашњих промена концентрације.
- Концентрације су неуниформне са максимумима на средини коморе, што утиче на расподелу депоноване фракције, чији је максимум такође на средини коморе.

# Хвала на пажњи

## Референце:

- N. Stevanovic, V.M. Markovic, D. Nikezic, **Time dependence of  $^{222}\text{Rn}/^{220}\text{Rn}$  and its progeny distributions in diffusion chamber**, NUCL INSTRUM METH A, accepted for publication
- V.M. Markovic, D. Nikezic, N. Stevanovic,  **$^{222}\text{Rn}$  and  $^{220}\text{Rn}$  diffusion in two mediums**, NUCL INSTRUM METH A, 857:16-23, 2017